Mathématiques - Obligatoire
Zone géographique : Liban
Session 2018
Terminale S

Exercice 1 — 3 Pts

1. La durée totale moyenne d'un appel au standard téléphonique est égale à la somme du temps d'attente et du temps d'échange avec le chargé de clientèle.
La durée totale d'un appel est donc égale à :

$$\begin{aligned} E(X)+E(Y) &= \frac{1}{\lambda}+96 \ (\textit{car X suit une loi exponentielle}) \\ &= \frac{1}{0,02}+96 \\ &= 50+96 \\ &= \boxed{146\text{s}} \end{aligned}$$

2. Un étudiant est choisi au hasard parmi les appelants du standard téléphonique.

a. Calculons la probabilité que l'étudiant soit mis en attente plus de 2min.
Puisque la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.
Et on a : $P(X>2min)=1-P(X\leq 2min)$ (Car l'événement $X\leq 2min$ est contraire à l'événement $X>2min$.

$P(X\leq 2min)=\int_0^{2\times 60} f(t)dt=\int_0^{120}\lambda e^{-\lambda t}dt=\lambda\int_0^{120} e^{-\lambda t}dt=\lambda(-\frac{1}{\lambda}e^{-120\lambda}+\frac{1}{\lambda}e^0)$
$=1-e^{-120\lambda}$.

donc :$P(X>2min)=1-(-e^{-120\lambda}+1)=1+e^{-120\ lambda}-1=e^{-120\lambda}=e^{-120\times\frac{1}{50}}$
$=e^{-2,4}\ \boxed{\approx 0,09}$.

b. Calculons la probabilité pour que le temps d'échange avec le conseiller soit inférieur à 90s.
La variable aléatoire Y suit une loi normale :
donc : $P(Y<96)=0,5=P(Y>96)$.
De plus, $(\forall a<\mu)$ $P(Y<96)=P(Y<90)+P(90<Y<96)$.
D'où: $P(Y<90)=0,5-P(90<Y<96)\ \boxed{\approx 0,4087}$. (A l'aide d'une calculatrice)

3. Puisque X suit une loi de probabilités exponentielle de paramètre $\lambda=\frac{1}{50}$, alors pour tout réels h et t positifs, nous avons :

$P_{X\geq t}(X \geq t+h) = P(X \geq h)$. (On dit que la loi exponenetielle est dans mémoire)
D'où : $\boxed{P_{X\geq 60}(X \geq 60+30) = P(X \geq 30)}$.

En conclusion : Le fait de raccrocher puis de rappeler n'augmente pas les chances de limiter à 30 secondes l'attente supplémentaire.

Exercice 2 — 3 Pts

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i) \\ &= \sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{4})+isin(\frac{\pi}{4})) \quad (Forme\ trigonométrique) \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (Forme\ exponentielle) \end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} 1-i &= 1\bar{+}I \\ &= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (Forme\ exponentielle) \\ &= \sqrt{2}(cos(-\frac{\pi}{4})+isin(\frac{-\pi}{4})) \quad (Forme\ trigonométrique) \end{aligned}$$

D'où les formes trigonométriques et exponentielle des nombres $1+i$ et $1-i$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$, on pose : $S_n = (1+i)^n + (1-i)^n$.

a. Déterminons la forme trigonométrique de S_n.

$S_n = (1+i)^n + (1-i)^n = \sqrt{2}^n(e^{i\frac{\pi}{4}})^n + \sqrt{2}^n(e^{e^{-i\frac{\pi}{4}}})^n = \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}} + \sqrt{2}^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$
$D'où\ S_n = 2\sqrt{2}^n cos(\frac{n\pi}{4})$. (D'après la formule d'Euler).

N.B. Il s'agit de la forme algébrique de S_n et non de sa forme trigonométrique. Pour calculer la forme trigonométrique, calculons le module et l'argument de S_n.
Le module de S_n : $\boxed{|S_n| = |2\sqrt{2}^n|cos(\frac{n\pi}{4})|}$

L'argument de S_n : $arg(S_n) = arg(2\sqrt{2}^n cos(\frac{n\pi}{4})) = arg(2\sqrt{2}^n) + arg(cos(\frac{n\pi}{4})) = arg(cos(\frac{n\pi}{4}))$.
$(cos(\frac{n\pi}{4})$ est un réel, son argument dépend alors de son signe. Etudions alors le signe de $cos(\frac{n\pi}{4})$ sur une période, par exemple $[0; 2\pi]$.

Soit $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} & 0 \leq \tfrac{n\pi}{4} \leq 2\pi \\ \Leftrightarrow\ & 0 \leq n\pi \leq 8\pi \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{0 \leq n \leq 8} \end{aligned}$$

D'où le tableau de signe et l'argument de $cos(\frac{n\pi}{4})$ pour $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{n\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
signe de $cos(\frac{n\pi}{4})$	+	+	0	-	-	-	0	+	+
$arg(cos(\frac{n\pi}{4}))$	0	0	x	π	π	π	x	0	0

- Si $n = k$; $n = 8k + 1$ ou $n = 8k + 7$ avec $k \in \mathbf{N}$, alors :
  $\boxed{S_n = |2\sqrt{2}^n cos(\frac{n\pi}{4})|(cos(0) + isin(0))}$
- Si $n = 8k + 3$; $n = 8k + 4$ ou $n = 8k + 5$ avec $k \in \mathbf{N}$, alors :
  $\boxed{S_n = |2\sqrt{2}^n cos(\frac{n\pi}{4})|(cos(\pi) + isin(\pi))}$
- Enfin, si $n = 8k + 2$ ou $n = 8k + 6$ avec $(k \in \mathbf{N})$ alors :
  $\boxed{cos(\frac{n\pi}{4}) = 0 \Rightarrow S_n = 0}$

b. **Affirmation A** : D'après la question précédente, la forme algébrique de S_n est :
$S_n = 2\sqrt{2}^n cos(\frac{n\pi}{4})$.
Donc, $(\forall n \in \mathbf{N})$ S_n est un réel. L'affirmation A est à cet effet vraie.

Affirmation B : D'après la question précedente, si n est de la forme $8k+2$ *ou* $8k+6$ $(\forall k \in \mathbf{N})$, alors : $S_n = 0$. L'affirmation B est alors vraie.

Exercice 3 — 4 Pts

1.a. Les coordonnées du sous-marin au début de l'observation, càd pour $t = 0$ sont :
$S_1(0) = (x(0); y(0); z(0)) = (140; 105; -170)$.

b. Comme indiqué dans l'énoncé, les 2 sous-marins se déplacent à vitesse constante et on a $v(t) = S_1'(t)$, avec :

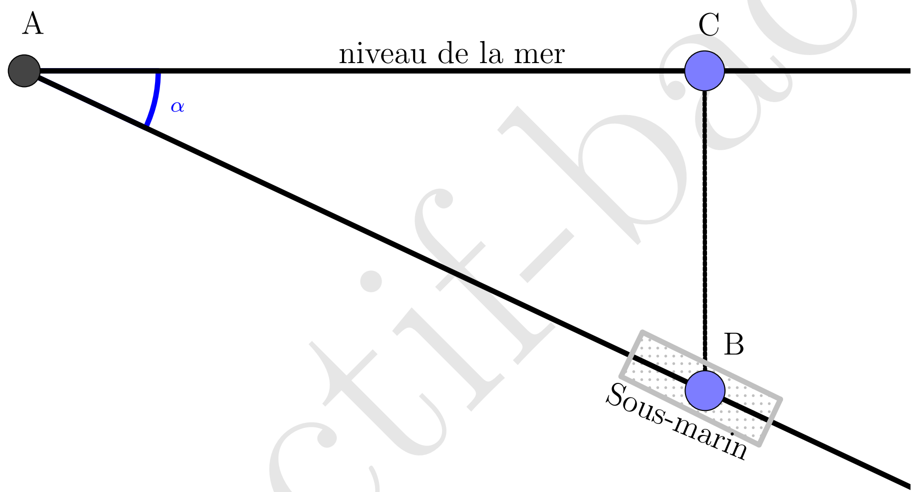
$$\begin{cases} x'(t) &= -60 \\ y'(t) &= -90 \\ z'(t) &= -30 \end{cases}$$

Nous avons donc : $\overrightarrow{V_{S_1}} = (-60; -90; -30)$.
D'où : $v_{S_1} = \sqrt{(-60)^2 + (-90)^2 + (-30)^2} = 30\sqrt{14}m/min \approx 112,25m/min$.

2. On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin.

Déterminons l'angle α que forme la trajectoire du sous-marin avec le plan horizontal.
à $t = 0$, $S_1(0) = A(140; 105; -170)$.

à $t = 1$, $S_1(1) = B(80; 15; -200)$.
Calculons les coordonnées du point C appartenant au niveau de la mer ($z_C = z_A$) et dont l'abcisse et l'ordonnée sont égaux à ceux du point B. ($x_C = x_B$ et $y_C = y_B$).
On a $C(80; 15; -170)$.
Comme le montre le schéma ci-dessous, le triangle ABC est rectangle en C.



On a alors :

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{AC}{AB} \\
&= \frac{\sqrt{(x_A - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}} \\
&= \frac{\sqrt{60^2 + 90^2 + 0^2}}{\sqrt{60^2 + 90^2 + 30^2}} \\
&= \frac{\sqrt{11700}}{\sqrt{12600}} \\
cos(\alpha) &= 0,9636 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 15,50 \ degrés}.
\end{aligned}$$

3. Calculons l'équation paramétrique du second sous-marin.
Puisque le second sous-marin se déplace à vitesse constante, alors nous avons :

$$\begin{cases} x_2'(t) &= \frac{x(3)-x(0)}{3-0} &= -90 \\ y_2'(t) &= \frac{y(3)-y(0)}{3-0} &= -180 \\ z_2'(t) &= \frac{z(3)-z(0)}{3-0} &= -60 \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} x_2(t) &= -90t + x_2(0) &= -90t + 68 \\ y_2(t) &= -180t + y_2(0) &= -180t + 135 \\ z_2(t) &= -60t + z_2(0) &= -60t + 68 \end{cases} \quad \text{car à t = 0, on a : } S_2(0) = (68; 135; -68).$$

D'où l'équation paramétrique du second sous-marin : $\begin{cases} x_2(t) &= -90t + +68 \\ y_2(t) &= -180t + +135 \\ z_2(t) &= -60t - 68 \end{cases}$

$$\begin{aligned} Les\ 2\ sous-marins\ sont\ à\ la\ même\ profondeur &\Leftrightarrow z_1(t) = z_2(t) \\ &\Leftrightarrow -170 - 30t = -60t - 68 \\ &\Leftrightarrow 30t = 170 - 68 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{170-68}{30} = \frac{102}{30} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\text{t = 3,4 min}} \end{aligned}$$

Exercice 4 — 5 Pts

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1; 5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{ln(x)}{x^n}$$

1. Montrons que pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1; 5]$: $f_n'(x) = \frac{1-nln(x)}{x^{n+1}}$.

Soit $n > 0$. La fonction $x \to x^n$ est continue et dérivable sur $[1; 5]$ et elle est strictement positive sur cet intervalle, donc la fonction $x \to \frac{1}{x^n}$ est dérivable sur $[1; 5]$.

Aussi, la fonction $x \to ln(x)$ est continue et dérivable sur $[1; 5]$ donc par multiplication et somme de fonctions dérivables, la fonction $x \to 1 - nln(x)$ est dérivable sur $[1; 5]$.

$\boxed{\text{D'où, la fonction } x \to \frac{1-nln(x)}{x^n} \text{ est dérivable sur } [1; 5].}$

Calculons la dérivée de f_n sur $[1; 5]$.

Soit $x \in [1;5]$, on a :

$$\begin{aligned}
f'_n(x) &= \frac{(ln(x))'x^n - ln(x)(x^n)'}{(x^n)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{x}x^n - ln(x)nx^{n-1}}{x^{2n}} \\
&= \frac{x^{n-1} - nx^{n-1}ln(x)}{x^{2n}} \\
&= \frac{x^{n-1}(1 - nln(x))}{x^{n-1+n+1}} \\
&= \frac{x^{n-1}(1 - nln(x))}{x^{n-1}x^{n+1}} \\
f'_n(x) &= \frac{1 - nln(x)}{x^{n+1}} \ (D'où\ le\ résultat\ demandé)
\end{aligned}$$

2. Soit $n > 0$, on admet que f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1;5]$. soit A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.

Montrons que tous les points A_n appartiennent à une même courbe $\mathcal{T}$ d'équation :

$$y = \frac{1}{e}ln(x)$$

Soit $x \in [1;5]$, étudions les variations de f_n sur $[1;5]$ et déterminos son maximum.

$$\begin{aligned}
f'_n(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1 - nln(x)}{x^{n+1}} = 0 \\
&\Leftrightarrow 1 - nln(x) = 0 (Car\ x \neq\ 0) \\
&\Leftrightarrow nln(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow ln(x) = \frac{1}{n} \\
f'_n(x) = 0 &\Leftrightarrow \boxed{\mathrm{x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}
\end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned}
f'_n(x) > 0 &\Leftrightarrow 1 - nln(x) > 0 \\
&\Leftrightarrow 1 > nln(x) \\
&\Leftrightarrow ln(x) < \frac{1}{n} \\
f'_n(x) > 0 &\Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

D'où le tableau de variations de f_n :

x	1		$e^{\frac{1}{n}}$		5
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(e^{\frac{1}{n}})$	$\searrow$	$\frac{ln(5)}{5^n}$

Le maximum de la fonction f_n sur $[1;5]$ est donc atteint pour $x_{A_n} = e^{\frac{1}{n}}$.
Et on a :

$$\begin{aligned} f_n(e^{\frac{1}{n}}) &= f(e^{\frac{1}{n}}) \\ &= \frac{ln(e^{\frac{1}{n}})}{(e^{\frac{1}{n}})^n} \\ f_n(e^{\frac{1}{n}}) &= \frac{1}{ne} \end{aligned}$$

De la même manière, calculons $y(e^{\frac{1}{n}})$:

$$\begin{aligned} y(e^{\frac{1}{n}}) &= \frac{1}{e} ln(e^{\frac{1}{n}}) \\ y(e^{\frac{1}{n}}) &= \frac{1}{ne} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{y(x_n) = f(x_n)}$$

Conclusion : Tous les points $A_n(x_n, y_n)$ appartiennent à une même courbe T d'équation : $y = \frac{1}{e} ln(x)$.

3.a. Montrons que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1;5]$ que :

$$0 \leq \frac{ln(x)}{x^n} \leq \frac{ln(5)}{x^n}$$

Soit : $x \in [1;5]$, on a donc :

$$1 \leq x \leq 5$$

La fonction $x \rightarrow ln(x)$ est continue et croissante sur $[1;5]$, donc :

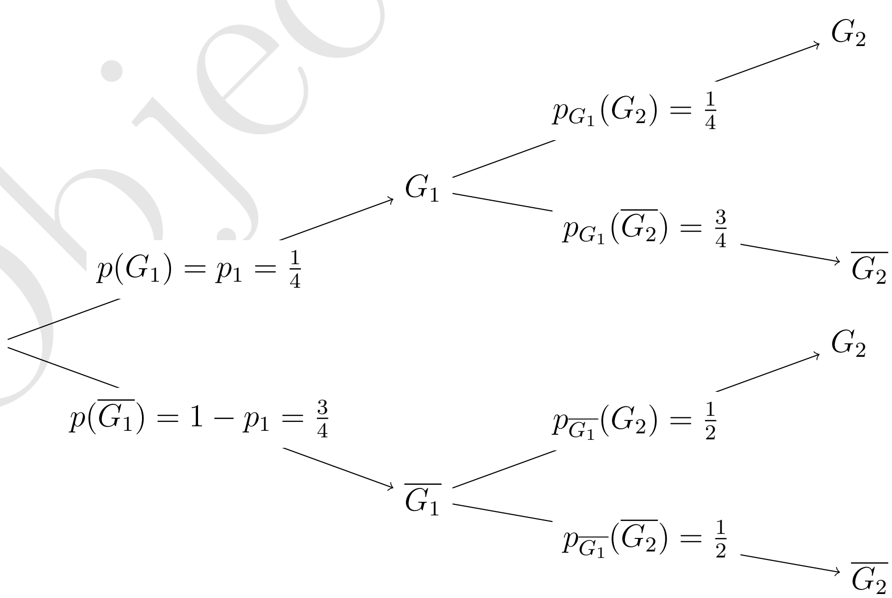
$$\begin{aligned} ln(1) \leq ln(x) &\leq ln(5) \\ 0 \leq ln(x) &\leq ln(5) \qquad (1) \end{aligned}$$

On a $x > 0$, donc $x^n > 0$. En divisant (1) par x^n, nous obtenons : $\boxed{0 \leq \frac{ln(x)}{x^n} \leq \frac{ln(5)}{x^n}}$.
D'où le résultat demandé.

3.b. Soit $n > 1$, montrons que : $\int_1^5 \frac{1}{x^n}dx = \frac{1}{n-1}(1 - \frac{1}{5^{n-1}})$
D'après le cours, la fonction $x \to F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ avec : $C \in \mathbf{R}$ est une primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x^n}$
On a alors : $\int_1^5 \frac{1}{x^n}dx = \frac{1}{n-1}(1 - \frac{1}{5^{n-1}}) = F(5) - F(1) = \frac{-1}{(n-1)5^{n-1}} + C + \frac{1}{n-1} - C$
$= \frac{1}{n-1}(1 - \frac{1}{5^{n-1}})$.D'où le résultat demandé.

3.c. Soit $n > 0$.
D'après la question a, on a prouvé que : $(\forall x \in [1; 5]) : 0 \leq \frac{ln(x)}{x^n} \leq \frac{ln(5)}{x^n}$.
D'après la propriété de la positivité de l'intégrale, on a : $\int_1^5 0dx \leq \int_1^5 \frac{ln(x)}{x^n}dx \leq \int_1^5 \frac{ln(5)}{x^n}dx$.
donc : $0 \leq \int_1^5 \frac{ln(x)}{x^n}dx \leq \frac{ln(5)}{n-1}(1 - \frac{1}{5^{n-1}})$.
Et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{ln(5)}{n-1}(1 - \frac{1}{5^{n-1}}) = 0$.
Par théorème d'encadrement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^5 \frac{ln(x)}{x^n}dx = 0}$.
En conclusion: $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0$. D'où la valeur limite de l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_n$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

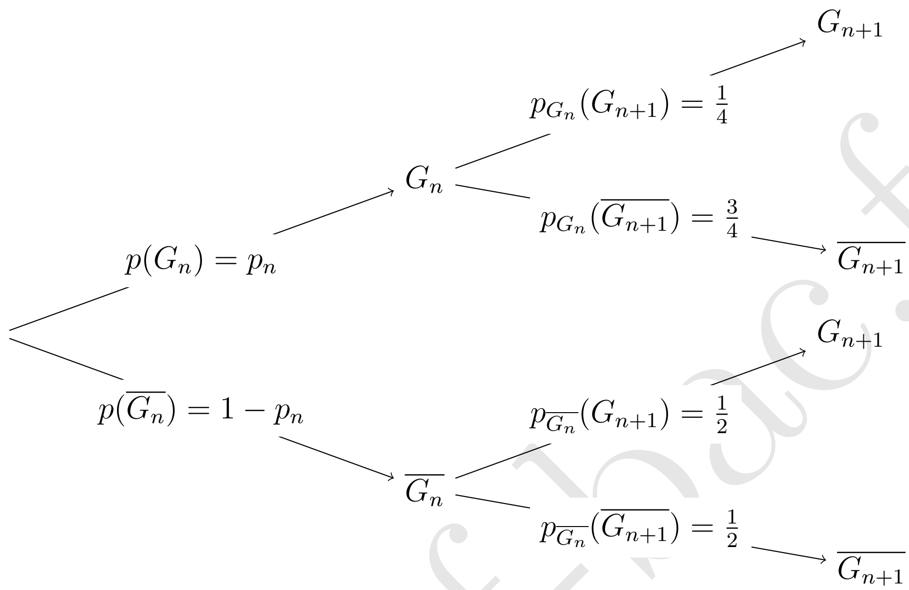
Exercice 5 **5 Pts**



D'après les formules des probabilités totales: $p_2 = p(G_2) = p(G_1 \cap G_2) + p(\overline{G_1} \cap G_2)$
$= \frac{1}{16} + \frac{3}{8} = \boxed{\frac{7}{16}}$.

2. Montrons que pour tout entier naturel non nul : $p_{n+1} = \frac{-1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.

Voici l'arbre résumant les données:



D'après la formule des probabilités totales:
$p_{n+1} = p(G_{n+1} \cap G_n) + p(G_{n+1} \cap \overline{G_n}) = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}(1 - p_n) = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n$.
D'où : $\boxed{p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}}$.

3. D'après les valeurs de p_n, on peut conjoncturer que la limite de la suite (p_n) est égale à 0,4.

4. Soit $(n \in \mathbf{N})$ et $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.
a. Démontrons que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{p_{n+1}-\frac{2}{5}}{p_n-\frac{2}{5}}\\
&= \frac{\frac{-1}{4}p_n+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}}{p_n-\frac{2}{5}}\\
&= \frac{-\frac{1}{4}p_n+\frac{5-4}{10}}{p_n-\frac{2}{5}}\\
&= \frac{-\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{10}}{p_n-\frac{2}{5}}\\
&= \frac{-\frac{1}{4}(p_n-\frac{4}{10})}{p_n-\frac{2}{5}}\\
&= -\frac{1}{4}(\frac{p_n-\frac{2}{5}}{p_n-\frac{2}{5}})\\
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Conclusion : La suite (u_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{4}$.

b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$:

On a : $u_n = -\frac{1}{4}u_{n-1} = (\frac{-1}{4})^2 u_{n-2} = (\frac{-1}{4})^{n-1}u_1$.
donc : $p_n - \frac{2}{5} = (\frac{-1}{4})^{n-1}(p_1 - \frac{2}{5})$.
donc : $p_n = \frac{2}{5} + (p_1 - \frac{2}{5})(\frac{-1}{4})^{n-1} = \frac{2}{5} + (\frac{1}{4} - \frac{2}{5})(\frac{-1}{4})^{n-1}$.
D'où : $\boxed{p_n = \frac{2}{5} + \frac{-3}{20}(\frac{-1}{4})^{n-1}}$.

c. Puisque : $0 < |\frac{-1}{4}| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{-1}{4})^{n-1} = 0$. D'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{5} = 0,4}$.
D'où la suite (p_n) est convergente, c'est cohérent avec la conjoncture émise à la question 3.
Conclusion : La probabilité de gagner une partie à long terme est de 0,4.

*** *fin de l'épreuve* ***